Electriciteit en Magnetisme 1

Woensdag 27 juni 2007

14:00 – 17:00 uur

Maak elk vraagstuk op een apart vel.
Vermeld op elk vel uw naam en studentennummer.
Schrijf leesbaar.

Dit tentamen bestaat uit 4 verschillende vragen.

Beoordeling :

Totaal te behalen punten 100.
De verdeling is:

Gratis		*10*
Vraag	*1*	*20*
Vraag	*2*	*25*
Vraag	*3*	*20*
Vraag	*4*	*25*

Vraag 1

Het electrisch veld tussen twee geleidende platen waarvoor geldt dat het oppervlak van de platen (A) veel groter is dan hun onderlinge afstand (d) en waarbij de platen een gelijke maar tegengestelde lading dragen is uniform en bedraagt

$$E = 4\pi k\sigma = \sigma / \varepsilon_0 .$$

Hierin is σ de lading per eenheid oppervlak en ε_0 de permittiviteit van het vacuum.

a- Laat nu zien dat de capaciteit van deze parallele plaat condensator $C = \varepsilon_0 A/d$ bedraagt.

b- Als we de platen op een onderlinge afstand van d = 1 cm plaatsen, tot welk voltage kunnen we de platen dan opladen voordat er doorslag optreedt. Lucht begint electriciteit te geleiden bij electrische veldsterkten van $3*10^6$ N/C (break-down).

c- Indien we de platen met een batterij verbinden met een spanning U, welke versnelling ondervindt een electron dan als hij in het midden tussen de platen wordt geplaatst.

d- We nemen nu een ronde parallele plaatcondensator met een straal (r) van 15 cm en plaatafstand (d) van 1 cm. We sluiten hierop een batterij met een spanning van 10 volt aan. Hoeveel electrische lading (Q) is er nu op de condensator platen.

e- Indien we de laadstroom van de condensator constant op 1 A houden, hoelang duurt het dan voordat de condensator is opgeladen.

Indien we de ruimte tussen de platen met een niet-geleidend materiaal vullen dan moeten we in de formules ε ipv ε_0 gebruiken.
Er geldt nu dat $\varepsilon = \varepsilon_r\, \varepsilon_0$, ε_r is de relatieve dielectrische constante van een materiaal en er geldt dat $\varepsilon_r \geq 1$

f - Nadat we de condensator zoals onder d) beschreven volledig hebben opgeladen en we laten de batterij aangesloten, wat gebeurt er dan met U, C en Q als we vervolgens de ruimte tussen de platen opvullen met een materiaal met $\varepsilon_r = 3$.

g – Indien we de lege condensator weer opladen zoals onder d) beschreven en de batterij verwijderen als het oplaadproces compleet is, wat gebeurt er dan met U,C en Q als we de ruimte tussen de platen met een materiaal met $\varepsilon_r = 3$ opvullen.

h- Indien we nu de opgeladen platen doormiddel van een weerstand (R) verbinden bepaal dat de ontlaadstroom als functie van de tijd, en geef deze grafisch weer.

$$C = \frac{Vm^2}{m} = \frac{Jm}{C \cdot a} \qquad a = \frac{C^2}{Jm} \qquad V = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dCV}{t}$$

$$I = I_0\, e^{-\frac{tR}{C}} \qquad C = \frac{Q}{V} \qquad I = C\frac{dV}{dt}$$

Vraag 1

Het electrisch veld tussen twee geleidende platen waarvoor geldt dat het oppervlak van de platen (A) veel groter is dan hun onderlinge afstand (d) en waarbij de platen een gelijke maar tegengestelde lading dragen is uniform en bedraagt

$$E = 4\pi k\sigma = \sigma / \varepsilon_0 .$$

Hierin is σ de lading per eenheid oppervlak en ε_0 de permittiviteit van het vacuum.

a- Laat nu zien dat de capaciteit van deze parallele plaat condensator $C = \varepsilon_0 A/d$ bedraagt.

b- Als we de platen op een onderlinge afstand van d = 1 cm plaatsen, tot welk voltage kunnen we de platen dan opladen voordat er doorslag optreedt. Lucht begint electriciteit te geleiden bij electrische veldsterkten van $3*10^6$ N/C (break-down).

c- Indien we de platen met een batterij verbinden met een spanning U, welke versnelling ondervindt een electron dan als hij in het midden tussen de platen wordt geplaatst.

d- We nemen nu een ronde parallele plaatcondensator met een straal (r) van 15 cm en plaatafstand (d) van 1 cm. We sluiten hierop een batterij met een spanning van 10 volt aan. Hoeveel electrische lading (Q) is er nu op de condensator platen.

e- Indien we de laadstroom van de condensator constant op 1 A houden, hoelang duurt het dan voordat de condensator is opgeladen.

Indien we de ruimte tussen de platen met een niet-geleidend materiaal vullen dan moeten we in de formules ε ipv ε_0 gebruiken.
Er geldt nu dat $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, ε_r is de relatieve dielectrische constante van een materiaal en er geldt dat $\varepsilon_r \geq 1$

f - Nadat we de condensator zoals onder d) beschreven volledig hebben opgeladen en we laten de batterij aangesloten, wat gebeurt er dan met U, C en Q als we vervolgens de ruimte tussen de platen opvullen met een materiaal met $\varepsilon_r = 3$.

g – Indien we de lege condensator weer opladen zoals onder d) beschreven en de batterij verwijderen als het oplaadproces compleet is, wat gebeurt er dan met U,C en Q als we de ruimte tussen de platen met een materiaal met $\varepsilon_r = 3$ opvullen.

h- Indien we nu de opgeladen platen doormiddel van een weerstand (R) verbinden bepaal dat de ontlaadstroom als functie van de tijd, en geef deze grafisch weer.

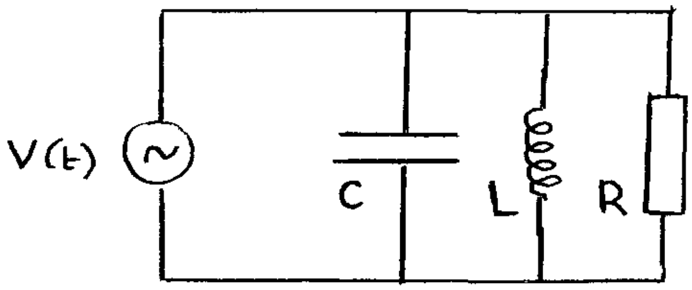
$C = \frac{Vm^2}{m} = \frac{Jm}{C \cdot a}$ $\quad a = \frac{C^2}{Jm}$ $\quad \cancel{V} = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dCV}{t}$

$I = I_0 e^{-\frac{tR}{L}}$ $\quad C = \frac{Q}{V}$ $\quad I = C\frac{dV}{dt}$

Vraag 2

Op een wisselspanningbron met $V(t) = V_0\cos(\omega t)$ zijn een weerstand (R), een spoel (L) en een condensator (C) in een parallele configuratie aangesloten.

Zie onderstaande tekening.



a- Geef de stroom i(t) in een complexe schrijfwijze.

b- Geef de stroom i(t) in een reële schrijfwijze.

c- Maak een grafiek van de faseverschuiving tussen stroom in spanning als functie van de hoekfrequentie (ω)

d- Bespreek de frequentie response van dit systeem en geef aan wat de invloed van de specifieke waarden van L en C hierop is.

e- Hoe gedraagt de stroom in het circuit zich als $R \longrightarrow \infty$ (wat voor soort filter hebben we dan)

$$\omega c - \frac{1}{\omega L} = 0$$

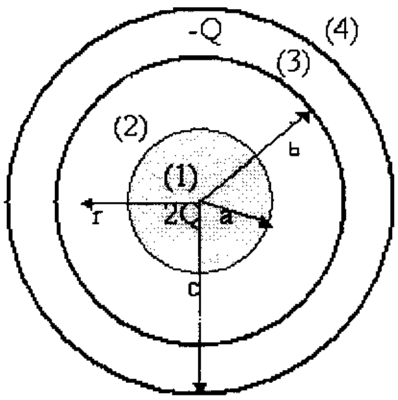
$$\omega c = \frac{1}{\omega L}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Vraag 3

Gegeven een stelsel van twee concentrische bollen. De binnenste massieve bol heeft een straal a en een ladingsverdeling $\rho(r) = \frac{2Q}{a^4\pi} r$ met $Q > 0$.

Daar omheen zit een massieve bolvormige geleider met binnenstraal b en buitenstraal c. De lading van deze geleider is $-Q$.
In de ruimte tussen beide bollen is vacuum.
In de figuur hieronder staat de opstelling weergeven.



a- Bepaal met behulp van de wet van Gauss de elektrische velden in de binnenste bol (1), tussen de twee bollen (2), binnen de buitenste bolvormige geleider (3) en buiten de concentrische bollen (4). Aangenomen mag worden dat dit systeem in elektrostatisch evenwicht is.

b- Bepaal tevens de lading op de schillen met straal b en c.

$$\rho_r = \frac{Q}{V}$$

$$\pi k = \frac{\pi}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\varepsilon_0}$$

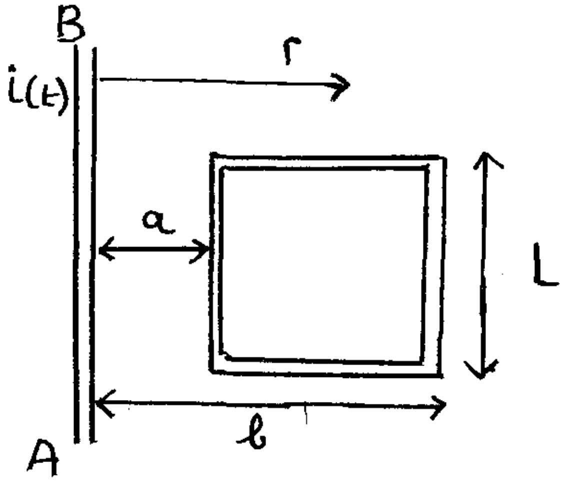
$$\rho(r) \frac{a^4 \cdot 2Qr}{8\varepsilon_0 r^3 a^4 \pi} = \frac{Q}{4r^2\varepsilon_0\pi}$$

$$4\pi k$$

Vraag 4

In een oneindig lange rechte geleider (AB) loopt een stoom i(t). Deze stroom neemt lineair in de tijd toe (dus di(t)/dt = constant).
Naast de draad op een afstand a bevindt zich een loop met hoogte L en breedte b - a.

Zie tekening.



$V = m^2 \cdot \frac{A}{s}$

$\Omega \, s = m^2$

a- Leidt af, gebruik makend van de wet van Biot – Savart, dat het magneetveld van de draad op een afstand r van die draad gelijk is aan

IB = 2ki(t)/cr

b- Wat is de totale flux van het magneetveld door de loop.

c- Bereken met de wet van Faraday de EMF die in de loop wordt opgewekt.

d- Bereken die EMF indien men aanneemt dat a = 12 cm, b = 36 cm, L = 24 cm en di(t)/dt = 9.6 A/s.

$\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+3^2)} \cdot 2x$

$\frac{x}{\sqrt{(x^2+r^2)}}$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \qquad -\frac{1}{r}$

$\frac{\cancel{2x}}{\sqrt{x^2+r^2}} \qquad -\frac{1}{2(x^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}}$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} \qquad \frac{1}{2}\sqrt{x^2+r^2} \qquad \frac{1}{2}\ln(x^2+r^2)$

$\frac{x}{\sqrt{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}} = -2$

Formules

De wet van Biot – Savart

$$\vec{\mathbb{B}} = \frac{k}{c}\sum_{\text{all } i}\frac{dL}{r_{Pi}^2}(\vec{I}_i \times \hat{r}_{Pi}) \qquad \text{or} \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{\text{all } i}\frac{dL}{r_{Pi}^2}(\vec{I}_i \times \hat{r}_{Pi}) \quad \text{(E8.10)}$$

Purpose: This equation describes the magnetic field $\vec{\mathbb{B}}$ produced at a point P by an arbitrarily shaped wire carrying a current I.

Symbols: $\vec{r}_{Pi}$ is P's position relative to the ith segment; $r_{Pi} = \text{mag}(\vec{r}_{Pi})$; $\hat{r}_{Pi} \equiv \vec{r}_{Pi}/r_{Pi}$ is directional representing the direction of $\vec{r}_{Pi}$; dL and $\vec{I}_i$ are the segment's length and conventional current, respectively; k is the Coulomb constant; and c is the speed of light.

Limitations: This equation strictly applies only to static magnetic fields. Also, dL must be small enough that all segments are essentially straight.

Note: This is called the **Biot-Savart law.**

Wetten van Maxwell in integrale vorm

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 4\pi k q_{\text{enc}} \qquad \text{or} \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(E13.26}a\text{)}$$

$$\oint \vec{\mathbb{B}}\cdot d\vec{S} - \frac{1}{c}\frac{d\Phi_E}{dt} = 4\pi k\frac{i_{\text{enc}}}{c} \qquad \text{or} \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_0 i_{\text{enc}} + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \text{(E13.26}b\text{)}$$

$$\oint \vec{\mathbb{B}}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{or} \qquad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(E13.26}c\text{)}$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{d\Phi_{\mathbb{B}}}{dt} = 0 \qquad \text{or} \qquad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(E13.26}d\text{)}$$

Purpose: These equations provide a complete and relativistically valid description of the behavior of dynamic electromagnetic fields.

Symbols: Φ_E, $\Phi_{\mathbb{B}}$, and Φ_B are the fluxes of $\vec{E}$, $\vec{\mathbb{B}}$, and $\vec{B}$, respectively, through the amperian loops used to calculate the circulations in equations where these fluxes appear. See the definitions of Gauss's laws and Ampere's laws for a discussion of other symbols.

Limitations: These equations are correct for all electromagnetic fields whenever their quantum nature is unimportant.

Note: The versions on the right express the equations in a more historical format and in terms of the constants $\varepsilon_0 = 1/4\pi k$ and $\mu_0 = 4\pi k/c^2$.